《中级微观经济学》PS5

授课教师： 徐化愚　　学生姓名： 岳羽辰　　学号： 2310120106

Due：2025.5.21

题目：Homework 9

Suppose a firm has a production function $y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$. The price of factor 1 is $w_1 = 16$, and the price of factor 2 is $w_2 = 4$.

假设企业生产函数 $y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$，其中生产要素 1 的价格 $w_1 = 16$，生产要素 2 的价格 $w_2 = 4$。

(1) Calculate the short-run cost function when $x_1 = \bar{x}_1 = 4$. Then calculate the long-run cost function.

(1) 计算当 $x_1 = \bar{x}_1 = 4$ 时的短期成本函数以及长期成本函数。

(2) What are the short-run and long-run costs of producing $y = 8$ units of output? What are the short-run and long-run costs of producing $y = 12$ units of output?

(2) 分别求出生产 8 单位和 12 单位时产量的短期和长期成本。

解答

(1) **短期成本函数：** 当 $x_1 = 4$ 时，生产函数变为：

$$y = f(4, x_2) = 4^{1/2} x_2^{1/2} = 2x_2^{1/2}$$

解得：

$$x_2 = \frac{y^2}{4}$$

短期总成本为：

$$C_{SR}(y) = 16 \times 4 + 4 \times \frac{y^2}{4} = 64 + y^2$$

长期成本函数： 在长期中，企业可以自由选择 x_1 和 x_2。构造拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = 16x_1 + 4x_2 + \lambda \left(y - x_1^{1/2} x_2^{1/2} \right)$$

对 x_1 和 x_2 求偏导并令其为零：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 16 - \lambda \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{1/2} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 4 - \lambda \frac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{-1/2} = 0$$

解得：

$$x_1 = \frac{y}{2}, \quad x_2 = 4x_1 = 2y$$

长期总成本为：

$$C_{LR}(y) = 16 \times \frac{y}{2} + 4 \times 2y = 8y + 8y = 16y$$

(2) **生产 $y = 8$ 单位时：**

短期成本和长期成本分别为

$$C_{SR}(8) = 64 + 8^2 = 64 + 64 = 128 \quad C_{LR}(8) = 16 \times 8 = 128$$

生产 $y = 12$ 单位时：

短期成本和长期成本分别为

$$C_{SR}(12) = 64 + 12^2 = 64 + 144 = 208 \quad C_{LR}(12) = 16 \times 12 = 192$$

题目 21.12

Al Deardwarf 生产塑胶鹿，他发现了一种完全自动化的生产方式，完全不使用劳动，只使用木材和塑胶。Al 的生产函数 $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2)^{1/2}$，其中 x_1 是使用的塑胶量，x_2 是使用的木材量，$f(x_1, x_2)$ 是生产的鹿的数量。

(a) 在图中画一条等产量线，这条等产量线代表的是能够生产 4 单位鹿的投入组合。再画出另一条等产量线，该线表示的是能够生产 6 单位鹿的投入组合。

(b) 该生产函数呈现递增、递减还是不变的规模收益?

(c) 如果要素价格是 (1, 1)，那么他生产 4 单位鹿的成本最小的方式是怎样的？该生产方式的成本是多少?

(d) 如果要素价格是 (1, 1)，那么他生产 6 单位鹿的成本最小的方式是怎样的？该生产方式的成本是多少?

(e) 当要素价格是 (1, 1) 时，该生产技术下生产 y 单位鹿的成本是 $c(1, 1, y) =$?

(f) 当要素价格是 (3, 1) 时，该生产技术下生产 y 单位鹿的成本是 $c(3, 1, y) =$?

解答

(a) 生产 4 单位鹿的等产量线：$2x_1 + x_2 = 16$；生产 6 单位鹿的等产量线：$2x_1 + x_2 = 36$

(b) 考虑将所有投入增加 $t > 1$ 倍，产出的变化为:

$$f(tx_1, tx_2) = (2tx_1 + tx_2)^{1/2} = t^{1/2}(2x_1 + x_2)^{1/2} = t^{1/2} f(x_1, x_2) < t \cdot f(x_1, x_2)$$

由于产出增加的比例小于投入增加的比例，该生产函数呈现 **递减规模收益**。

(c) 要素价格为 (1, 1) 时生产 4 单位鹿的成本最小化

生产 4 单位鹿的约束条件为:

$$(2x_1 + x_2)^{1/2} = 4 \implies 2x_1 + x_2 = 16$$

代入约束条件，成本函数变为:

$$C = x_1 + x_2 = x_1 + (16 - 2x_1) = 16 - x_1$$

为了最小化成本，最大化 x_1。当 $x_1 = 8$ 时，$x_2 = 0$，此时成本最小，最小成本为:

$$C = 8 + 0 = 8$$

(d) 要素价格为 (1, 1) 时生产 6 单位鹿的成本最小化

计算过程同 (c)，当 $x_1 = 18$ 时，$x_2 = 0$，此时成本最小，最小成本为:

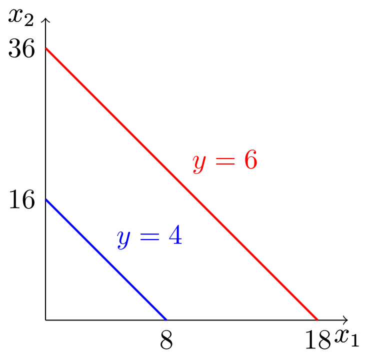
$$C = 18 + 0 = 18$$

(e) 要素价格为 (1, 1) 时的成本函数

对于任意产出 y，最小化成本时 $x_2 = 0$，则: $c(1, 1, y) = \frac{y^2}{2}$

(f) 要素价格为 (3, 1) 时的成本函数

对于任意产出 y，最小化成本时 $x_1 = 0$，则: $c(3, 1, y) = y^2$



题目 22.4
Mary Magnolia 想在一条新商业街上开一家名为 “Petal Pusher” 的花店。她可以选择三种不同的面积，200 平方英尺、500 平方英尺或者 1000 平方英尺。每平方英尺的月租金是 1 美元。Mary 估计，如果她的店面面积是 F 平方英尺，每月卖出 y 束花的话，她每月的可变成本将是 $c_v(y) = \frac{y^2}{F}$。
(a) 如果她的店面面积是 200 平方英尺，写出她的边际成本函数和平均成本函数。产量为多少时平均成本最小？此时的平均成本是多少？
(b) 如果她的店面面积是 500 平方英尺，写出她的边际成本函数和平均成本函数。产量为多少时平均成本最小？此时的平均成本是多少？
(c) 如果她的店面面积是 1000 平方英尺，写出她的边际成本函数和平均成本函数。产量为多少时平均成本最小？此时的平均成本是多少？
(d) 用红笔画出她的店面是 200 平方英尺时的平均成本曲线和边际成本曲线。用蓝笔画出她的店面是 500 平方英尺时的平均成本曲线和边际成本曲线。用黑笔画出她的店面是 1000 平方英尺时的平均成本曲线和边际成本曲线。平均成本曲线标为 AC，边际成本曲线标为 MC。
(e) 用黄笔在图中画出 Mary 的长期平均成本曲线和长期边际成本曲线，并分别标为 LRAC 和 LRMC。

解答

(a) **边际成本函数：**

$$MC_{200}(y) = \frac{2y}{200} = \frac{y}{100}$$

平均成本函数：

$$AC_{200}(y) = \frac{200 + \frac{y^2}{200}}{y} = \frac{200}{y} + \frac{y}{200}$$

平均成本最小化时的产量： 对 $AC_{200}(y)$ 求导并令导数为零：

$$\frac{dAC_{200}}{dy} = -\frac{200}{y^2} + \frac{1}{200} = 0 \implies y = 200$$

平均成本：

$$AC_{200}(200) = \frac{200}{200} + \frac{200}{200} = 1 + 1 = 2$$

(b)(c) 计算过程同 (a)

边际成本函数：

$$MC_{500}(y) = \frac{y}{250}, \quad MC_{1000}(y) = \frac{y}{500}$$

平均成本函数：

$$AC_{500}(y) = \frac{500}{y} + \frac{y}{500}, \quad AC_{1000}(y) = \frac{1000}{y} + \frac{y}{1000}$$

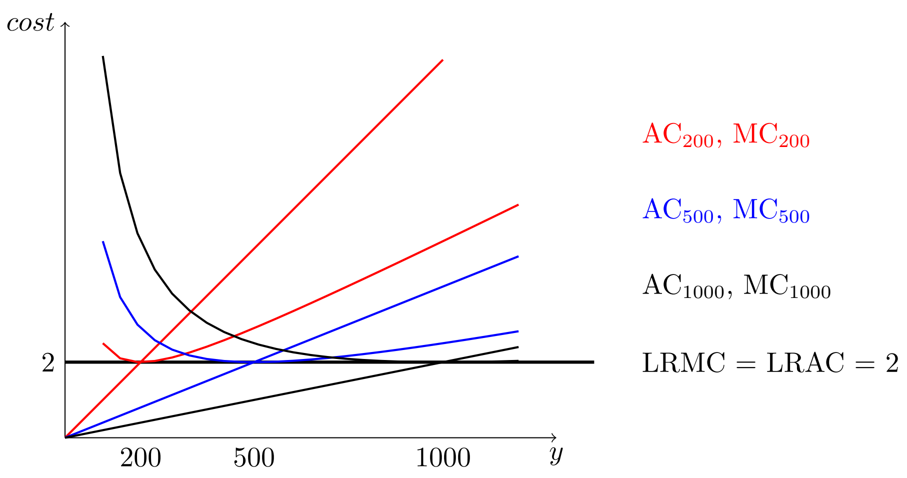
平均成本最小化时的产量：

$$y = 500, \quad y = 1000$$

平均成本：

$$AC_{500}(500) = 2, \quad AC_{1000}(1000) = 2$$

(d)(e)



题目 22.6

Touchie MacFeelie 出版漫画书。他所需的投入只是一些笑话和漫画家。其生产函数 $Q = 0.1J^{1/2}L^{3/4}$，J 是使用的笑话的数量，L 是漫画家工作小时数，Q 是漫画书的产出量。公司经理 Gander MacGrope 称，每则笑话可用 1 美元买到，漫画家劳动的工资率是 2 美元。

(a) 假设短期里 Touchie 有 100 个笑话 (每则笑话要花 1 美元)，但是他愿意使用多少单位的劳动都可以。要生产 Q 本漫画书，他必须使用多少单位的劳动?

(b) 写出 Touchie 公司以产量为自变量的短期总成本函数。

(c) 他的短期边际成本函数是?

(d) 短期平均成本函数是?

解答

(a) 短期内使用 100 个笑话时的劳动需求

给定 $J = 100$，生产函数变为:

$$Q = 0.1 \times 100^{1/2} \times L^{3/4} = 0.1 \times 10 \times L^{3/4} = L^{3/4}$$

解得劳动需求函数:

$$L = Q^{4/3}$$

(b) 短期总成本函数

短期总成本包括固定成本（笑话）和可变成本（劳动）:

$$C(Q) = 100 \times 1 + 2 \times L = 100 + 2L$$

代入劳动需求函数 $L = Q^{4/3}$:

$$C(Q) = 100 + 2Q^{4/3}$$

(c) 短期边际成本函数

边际成本是总成本对产量的导数:

$$MC(Q) = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q} = 2 \times \frac{4}{3}Q^{1/3} = \frac{8}{3}Q^{1/3}$$

(d) 短期平均成本函数

平均成本是总成本除以产量:

$$AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{100 + 2Q^{4/3}}{Q} = \frac{100}{Q} + 2Q^{1/3}$$