《中级微观经济学》PS4

授课教师：徐化愚　　学生姓名：岳羽辰　　学号：2310120106

Due：2025.4.23

题目：Homework 8

Consider a firm with the production function, $Q = K^{1/4}L^{1/2}$. Assume that the price of one unit of capital is r, the price of one unit of labor is w, and the firm may sell each unit of output at price, p.

考虑一个具有生产函数 $Q = K^{1/4}L^{1/2}$ 的公司。假设每单位资本的价格为 r，每单位劳动的价格为 w，并且公司可以以价格 p 出售每单位产出。

(1) Does this firm have decreasing, constant, or increasing returns to scale?

(1) 该公司的规模报酬递减、不变还是递增?

(2) Does the firm have a convex production function, i.e., does the firm's production function exhibit a diminishing technical rate of substitution?

(2) 该公司的生产函数是否为凸函数，即该公司的生产函数是否表现出边际技术替代率 (TRS) 递减?

(3) Suppose that the firm owns a fixed stock of $\bar{K} = 64$ units of capital. It must pay $r = 1$ per unit of capital if the firm operates, $Q > 0$, but can avoid this cost if it chooses to shut down, $Q = 0$. Assume that $w = 1$ and $p = 6$. Determine the profit maximizing level of output.

(3) 假设该公司拥有固定数量的资本存量 $\bar{K} = 64$。如果公司运营（即 $Q > 0$），则必须支付每单位资本 $r = 1$ 的费用，但如果公司选择停产（即 $Q = 0$），则可以避免这项费用。假设 $w = 1$ 且 $p = 6$。计算利润最大化的产出水平。

(4) Suppose the wage rate increases to $w = 3$, what is the profit maximizing level of output?

(4) 假设工资率增加到 $w = 3$，此时利润最大化的产出水平是多少?

解答

(1) 生产函数 $Q = K^{1/4}L^{1/2}$ 表现出**规模报酬递减**。

当资本 K 和劳动 L 都增加到 t 倍时，产出增加到 $t^{3/4}$ 倍，小于 t。(其中 $t > 1$)

(2) 生产函数是凸的且表现出**边际技术替代率递减**。边际技术替代率（TRS）为:

$$\text{TRS} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}L} = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{(1/2)K^{1/4}L^{-1/2}}{(1/4)K^{-3/4}L^{1/2}} = -\frac{2K}{L}$$

这表明随着 L 的增加和 K 的减少，$|\text{TRS}|$ 递减。

(3) 已知 $\bar{K} = 64$、$r = 1$、$w = 1$、$p = 6$，利润函数为:

$$\Pi = 6 \times 64^{1/4}L^{1/2} - 64 - L$$

对 L 求导并设为零:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}L} = 6 \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2}L^{-1/2} - 1 = 0$$

解得 $L = 72$，代入生产函数得 $Q = 24$。

题目自相矛盾,停产不等于退出市场,仍需支付固定成本(题干却说可免去这项费用)

(4) 当 $w = 3$ 时，利润函数变为:

$$\Pi = 6 \times 64^{1/4}L^{1/2} - 64 - 3L$$

求导并设为零，计算显示利润为负。因此，公司应选择停产，利润最大化的产出水平为 $Q = 0$。

题目 19.4

Fragles 的生产函数为 $f(K,L)=L/2+\sqrt{K}$，其中 L 是劳动的使用量，K 是资本的使用量。

(a) 存在规模收益（不变、递增、递减）：______________。劳动的边际产量（不变、递增、递减）：______________。

(b) 短期内，资本固定在 4 单位，劳动可变。在图中：

(1) 用蓝线绘制短期总产量曲线（作为劳动投入量的函数）。

(2) 用红线绘制短期劳动边际产量曲线（作为劳动投入量的函数）。

(3) 用黑线绘制短期劳动平均产量曲线（总产量除以劳动投入量，作为劳动投入量的函数）。

解答

(a) **公司的规模报酬递减**。如果资本 K 和劳动 L 都增加到 t 倍，产出增加到 $\sqrt{t}$ 倍，小于 t。（其中 $t>1$）
劳动的边际产量不变。劳动的边际产量（MPL）计算为 $\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{1}{2}$，保持不变。

(b) 当资本固定为 $K=4$ 时，生产函数变为

$$f(L)=\frac{L}{2}+\sqrt{4}=\frac{L}{2}+2$$

(1) **总产量曲线（蓝线）**：总产量随劳动投入量变化的函数为

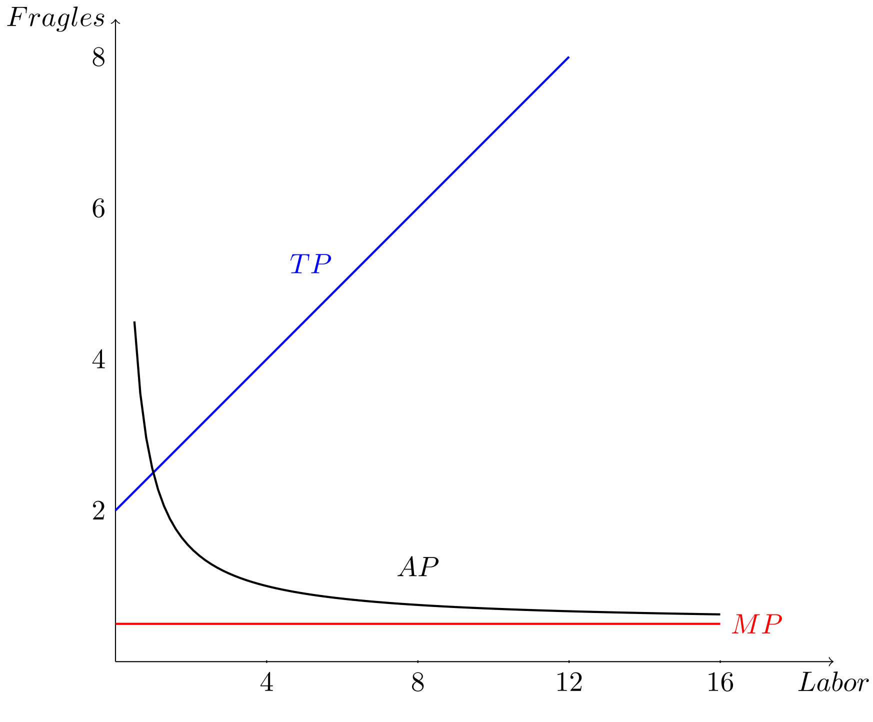
$$TP(L)=\frac{L}{2}+2$$

(2) **边际产量曲线（红线）**：劳动的边际产量恒定为

$$MP(L)=\frac{1}{2}$$

(3) **平均产量曲线（黑线）**：劳动的平均产量为

$$AP(L)=\frac{TP(L)}{L}=\frac{\frac{L}{2}+2}{L}=\frac{1}{2}+\frac{2}{L}$$



题目 19.9

假设生产函数为 $f(x_1,x_2)=Cx_1^a x_2^b$，其中 a、b、C 均为正的常数。

(a) a、b、C 取何值时存在规模收益递减、不变、递增?

(b) a、b、C 取何值时要素 1 的边际产量递减?

(c) a、b、C 取何值时技术替代率递减?

解答

(a) 规模收益由生产函数的次数和决定。生产函数 $f(x_1,x_2)=Cx_1^a x_2^b$ 的次数和为 $a+b$。

规模收益递减：当且仅当 $a+b<1 \quad \& \quad a,b,C>0$

规模收益不变：当且仅当 $a+b=1 \quad \& \quad a,b,C>0$

规模收益递增：当且仅当 $a+b>1 \quad \& \quad a,b,C>0$

(b) 要素 1 的边际产量为 $\frac{\partial f}{\partial x_1}=aCx_1^{a-1}x_2^b$。边际产量递减要求边际产量的导数为负：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=a(a-1)Cx_1^{a-2}x_2^b<0$$

由于 a、b、C 均为正数，因此需要 $a<1$。

要素 1 的边际产量递减当且仅当 $0<a<1 \quad \& \quad b,C>0$

(c) 技术替代率（TRS）定义为

$$-\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}=-\frac{ax_2}{bx_1}$$

技术替代率递减要求其绝对值随 x_1 增加和 x_2 减少而递减，这需要 a 和 b 满足以下条件：

$$\frac{\partial|\mathrm{TRS}|}{\partial x_1}=-\frac{a}{b}\left(\frac{x_2}{x_1^2}\right)<0$$

由于 a、b、x_1、x_2 均为正数，因此技术替代率递减总是成立。

技术替代率递减当且仅当 $a,b,C>0$

题目 20.3

Brother Jed 接收小偷，并把他们转化成正直的人。这一过程需要两种投入：小偷（到处可得）以及教育。生产函数的形式是 $r_p=\min\{h,p\}$，其中 r_p 是转化出来的正直人的数量，h 是参加 Jed 的教育的小偷人数，p 是教育的小时数。Jed 每转化一个人将从充满感激的改邪归正者那里得到支付 s。但是令人伤心的是，小偷不会自愿地去参加 Jed 的教育活动。而为了吸引他们去参加自己的教育活动，Jed 必须支付给他们每人 w。假设教育的数量固定为 $\bar{p}$，并且 Jed 是一个利润最大化的倡导者。

(a) 如果 $h<\bar{p}$，小偷的边际产量是多少？额外一个小偷的边际产品价值是多少？

(b) 如果 $h>\bar{p}$，小偷的边际产量是多少？此时额外一个小偷的边际产品价值是多少？

(c) 在图中画出这一生产函数的形状。标出坐标轴，并指出 $h=\bar{p}$ 时的投入量。

(d) 如果 $w<s$，被转化的小偷人数是多少？如果 $w>s$，将有多少个小偷被转化？

解答

(a) **小偷的边际产量为 1**。当 $h<\bar{p}$ 时，生产函数 $r_p=\min\{h,p\}$ 由 h 决定，因此每增加一个小偷，转化数量增加 1。**边际产品价值为 s**。Jed 每转化一个人将从充满感激的改邪归正者那里得到支付 s。

(b) **小偷的边际产量为 0**。当 $h>\bar{p}$ 时，生产函数 $r_p=\min\{h,p\}$ 由 p 决定，增加小偷数量不会提高转化数量。**边际产品价值为 0**。此时额外小偷的边际产品价值为 0。

(c) 生产函数 $r_p=\min\{h,p\}$ 的图形如下，其中横轴为 h，纵轴为 r_p。当 $h=\bar{p}$ 时，转化数量为 $\bar{p}$。

$$r_p(h)=\begin{cases} h & ,0\le h\le \bar{p} \\ \bar{p} & ,h>\bar{p} \end{cases}$$

(d) Jed 的利润函数为：

$$\Pi=s\cdot r_p-w\cdot h\le sh-wh=(s-w)h$$

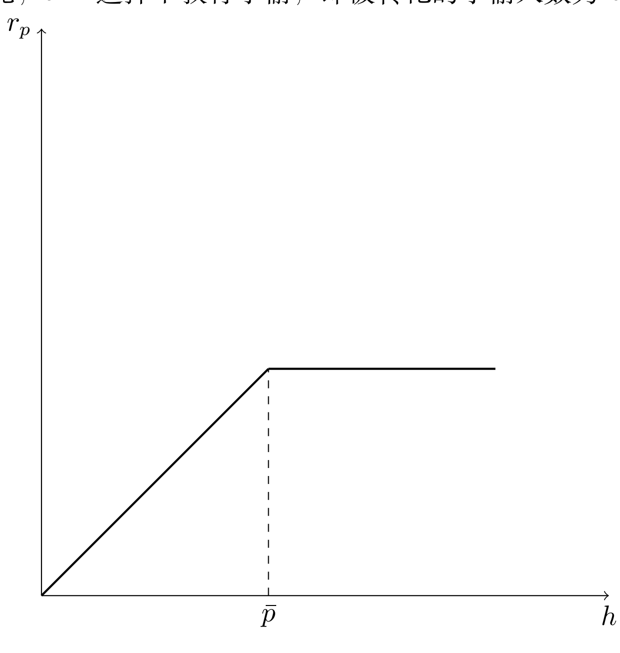
(1) 若 $w<s$，则 Π 有取正的可能，

当 $h\le\bar{p}$ 时，$\Pi=(s-w)h\le(s-w)\bar{p}$，当且仅当 $h=\bar{p}$ 时利润最大水平为 $(s-w)\bar{p}$；

当 $h>\bar{p}$ 时，$\Pi=s\bar{p}-wh<(s-w)h$，并非利润最大水平。

从而，被转化的小偷人数为 $\bar{p}$。

(2) 若 $w>s$，则 Π 无取正的可能，Jed 选择不教育小偷，即被转化的小偷人数为 0。



题目 20.9

农场主 Hoglund 发现，如果他不在自己的农场上使用化肥，他每英亩可以收获 30 蒲式耳的玉米。如果他在每英亩土地上使用 N 磅化肥，则化肥的边际产量是每磅化肥 $1 - N/200$ 蒲式耳玉米。

(a) 若玉米的价格是每蒲式耳 3 美元，化肥的价格是每磅 p 美元（$p < 3$），为最大化利润，每英亩应用多少磅化肥？

(b) 写出以每英亩化肥使用量为自变量的 Hoglund 每英亩产出的函数。

(c) Hoglund 的邻居 Skoglund 的土地比 Hoglund 的要好。实际上，他使用化肥时每英亩得到的玉米是 Hoglund 使用相同量化肥时得到的玉米的两倍。如果玉米的价格是每蒲式耳 3 美元，化肥的价格是每磅 p 美元，则 Skoglund 每英亩将会使用多少化肥？（提示：先写出 Skoglund 使用化肥时的边际产量，这一边际产量是 N 的函数。）

(d) 若 Hoglund 和 Skoglund 都是利润最大化者，Skoglund 的产量是大于、小于还是等于 Hoglund 产量的两倍？

(e) 某人知道 Hoglund 和 Skoglund 的玉米产量以及他们所投入的化肥量，但是不知道他们土地质量的差别，那么他可能会对化肥的生产力产生错误的看法。解释一下原因。

解答

(a) 为最大化利润，将化肥的边际产量等于玉米价格与化肥价格的比率。化肥的边际产量为 $1 - \frac{N}{200}$。利润最大化条件：

$$1 - \frac{N}{200} = \frac{p}{3} \quad \rightarrow \quad N = 200\left(1 - \frac{p}{3}\right)$$

因此，每英亩的利润最大化化肥用量为 $\mathbf{200\left(1 - \frac{p}{3}\right)}$ 磅。

(b) 通过积分化肥的边际产量，可以得到总产量函数。起始产量为 30 蒲式耳（无化肥时），因此：

$$Y = \int_0^N \left(1 - \frac{N'}{200}\right) dN' + 30 \quad \rightarrow \quad Y = N - \frac{N^2}{400} + 30$$

因此，每英亩产出函数为 $\mathbf{Y = N - \frac{N^2}{400} + 30}$。

(c) Skoglund 生产函数 $Y = 2\left(N - \frac{N^2}{400} + 30\right)$。其化肥边际产量为 $2\left(1 - \frac{N}{200}\right)$。令其等于玉米价格与化肥价格的比率：

$$2\left(1 - \frac{N}{200}\right) = \frac{p}{3} \quad \rightarrow \quad N = 200\left(1 - \frac{p}{6}\right)$$

因此，Skoglund 每英亩的利润最大化化肥用量为 $\mathbf{200\left(1 - \frac{p}{6}\right)}$ 磅。

(d) Skoglund 的产量将大于 Hoglund 产量的两倍。
这是因为 Skoglund 的化肥边际产量更高，导致他使用更多的化肥并生产更多的玉米。

(e) 观察者可能将产量差异完全归因于化肥的使用量，而忽略了土地质量的差异。这导致他们高估 Skoglund 土地上化肥的生产力，并低估 Hoglund 土地上化肥的生产力。实际上，产量的差异是化肥使用量和土地质量共同作用的结果。

题目 20.11

某个企业有两种可变的要素，其生产函数为 $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$。其产品的价格为 4，要素 1 的价格为 w_1，要素 2 的价格为 w_2。

(a) 写出表示每种要素的边际产品价值等于其工资的两个方程。如果 $w_1 = 2w_2$，则这两个方程意味着 $\frac{x_1}{x_2} =$?

(b) 对这一生产函数，有可能得到两个边际产量方程关于 x_1 和 x_2 的唯一解吗?

解答

(a)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = w_1 \quad \text{即} \quad 2x_1^{-1/2} x_2^{1/2} = w_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = w_2 \quad \text{即} \quad 2x_1^{1/2} x_2^{-1/2} = w_2 \end{cases}$$

若 $w_1 = 2w_2$，则

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$$

(b) 由 (a) 可知，$w_1 x_1 = w_2 x_2$

仅可得 x_1/x_2 的唯一解，不可能得到 x_1 和 x_2 的唯一解。