《中级微观经济学》PS2

授课教师：徐化愚　　学生姓名：岳羽辰　　学号：2310120106

Due：2025.3.26

题目：Homework 4

There are three commodities available for consumption. In week 1, the prices of these commodities are $(p_1, p_2, p_3) = (4, 2, 2)$, and you observe Antwan consume quantities $(x_1, x_2, x_3) = (6, 3, 2)$. In week 2, the prices of the commodities are $(p_1, p_2, p_3) = (3, 4, 1)$, and you observe Antwan consume quantities $(x_1, x_2, x_3) = (2, 4, 6)$. In week 3, the prices of the commodities are $(p_1, p_2, p_3) = (1, 5, 2)$, and you observe Antwan consume quantities $(x_1, x_2, x_3) = (4, 2, 8)$. You may assume that Antwan has monotonic preferences. Show that Antwan's choices satisfy the Weak Axiom of Revealed Preference (WARP). Do Antwan's choices satisfy the Strong Axiom of Revealed Preference (SARP)? Assuming that Antwan's choices do not change, is there an alternative price of commodity 1 in week 1, such that his choices violate WARP? Please explain your answers.

有三种商品可供消费：

第 1 周，商品价格为 $(p_1, p_2, p_3) = (4, 2, 2)$，Antwan 消费数量为 $(x_1, x_2, x_3) = (6, 3, 2)$；

第 2 周，商品价格为 $(p_1, p_2, p_3) = (3, 4, 1)$，Antwan 消费数量为 $(x_1, x_2, x_3) = (2, 4, 6)$；

第 3 周，商品价格为 $(p_1, p_2, p_3) = (1, 5, 2)$，Antwan 消费数量为 $(x_1, x_2, x_3) = (4, 2, 8)$。

假设 Antwan 具有单调偏好。

(1) 证明 Antwan 的选择满足弱显示偏好公理（WARP）。

(2) Antwan 的选择是否满足强显示偏好公理（SARP）?

(3) 假设 Antwan 的选择不变，是否存在第 1 周商品 1 的另一种价格，使得他的选择违反 WARP？请说明理由。

解答

价格 \ 选择	$A = (6, 3, 2)$	$B = (2, 4, 6)$	$C = (4, 2, 8)$
(4,2,2)	34	28(D)	36(I)
(3,4,1)	32(I)	28	28(D)
(1,5,2)	25(D)	34(I)	30

(1) 证明：如上表所示，

$$A \succ_D B, \quad B \succ_D C, \quad C \succ_D A$$

故 Antwan 的选择满足 WARP

(2) 由 (1) 知，

$$B \succ_I A, \quad C \succ_I B, \quad A \succ_I C$$

从而有以下三对矛盾

$$A \succ_D B \;\&\; B \succ_I A; \quad B \succ_D C \;\&\; C \succ_I B; \quad C \succ_D A \;\&\; A \succ_I C$$

故 Antwan 的选择违反 SARP

(3) 若要违反 WARP，只需令第 1 周的商品 1 价格 p_1' 满足 $A \succ_D C$ 即可，从而

$$6p_1' + 3 \times 2 + 2 \times 2 \geq 4p_1' + 2 \times 2 + 8 \times 2$$

解得

$$p_1' \geq 5$$

即当 $p_1' \geq 5$ 时，Antwan 的选择违反 WARP

题目：Homework 5

Ambrose's utility function for goods 1 and 2 is $u(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + x_2$. Suppose Ambrose has \$48 to spend on goods 1 and 2, that the price of good 2 is $P_2 = 8$, and that the price of good 1 falls from $P_1 = 4$ to $P_1 = 2$. Calculate Ambrose's original optimal bundle, his new optimal bundle after the price decrease, and the income and substitution effects on good 1. Show your work. Now suppose that Ambrose has \$256 to spend on goods 1 and 2, that the price of good 2 is $P_2 = 8$, and that the price of good 1 falls from $P_1 = 4$ to $P_1 = 2$. Again, calculate Ambrose's original optimal bundle, his new optimal bundle after the price decrease, and the income and substitution effects on good 1. Show your work.

Ambrose 对商品 1 和商品 2 的效用函数是 $u(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + x_2$。

(1) 假设他有 48 美元用于购买商品 1 和商品 2，商品 2 的价格是 $P_2 = 8$，商品 1 的价格从 $P_1 = 4$ 下降到 $P_1 = 2$。计算 Ambrose 原来的最优消费组合、价格下降后的新最优消费组合、商品 1 的收入效应和替代效应。

(2) 假设他有 256 美元用于购买商品 1 和商品 2，商品 2 的价格是 $P_2 = 8$，商品 1 的价格从 $P_1 = 4$ 下降到 $P_1 = 2$。再次计算 Ambrose 原来的最优消费组合、价格下降后的新最优消费组合、商品 1 的收入效应和替代效应。

解答

(1) 原始约束 $4x_1 + 8x_2 = 48$ 即$x_1 + 2x_2 = 12,\ 0 \le x_1 \le 12,\ 0 \le x_2 \le 6$ ，最优化

$$u = -\frac{1}{2}(\sqrt{x_1})^2 + 4(\sqrt{x_1}) + 6 = -\frac{1}{2}(\sqrt{x_1} - 4)^2 + 14$$

当 $x_1 = 12,\ x_2 = 0$ 时，效用最大化，**原来的最优消费组合为** $(x_1, x_2) = (12, 0)$

中间约束 $2x_1 + 8x_2 = 2 \times 12 + 8 \times 0 = 24$ 即$x_1 + 4x_2 = 12,\ 0 \le x_1 \le 12,\ 0 \le x_2 \le 3$ ，最优化

$$u = -\frac{1}{4}(\sqrt{x_1})^2 + 4(\sqrt{x_1}) + 3 = -\frac{1}{4}(\sqrt{x_1} - 8)^2 + 19$$

当 $x_1 = 12,\ x_2 = 0$ 时，效用最大化，中间的最优消费组合为 $(x_1, x_2) = (12, 0)$

新的约束 $2x_1 + 8x_2 = 48$ 即$x_1 + 4x_2 = 24,\ 0 \le x_1 \le 24,\ 0 \le x_2 \le 6$ ，最优化

$$u = -\frac{1}{4}(\sqrt{x_1})^2 + 4(\sqrt{x_1}) + 6 = -\frac{1}{4}(\sqrt{x_1} - 8)^2 + 22$$

当 $x_1 = 24,\ x_2 = 0$ 时，效用最大化，**新的最优消费组合为** $(x_1, x_2) = (24, 0)$

故商品 1 的替代效应 $\Delta x_1^s = 12 - 12 = 0$，收入效应 $\Delta x_1^n = 24 - 12 = 12$

(2) 原始约束 $4x_1 + 8x_2 = 256$ 即$x_1 + 2x_2 = 64,\ 0 \le x_1 \le 64,\ 0 \le x_2 \le 32$ ，最优化

$$u = -\frac{1}{2}(\sqrt{x_1})^2 + 4(\sqrt{x_1}) + 32 = -\frac{1}{2}(\sqrt{x_1} - 4)^2 + 40$$

当 $x_1 = 16,\ x_2 = 24$ 时，效用最大化，**原来的最优消费组合为** $(x_1, x_2) = (16, 24)$

中间约束 $2x_1 + 8x_2 = 2 \times 16 + 8 \times 24 = 224$ 即$x_1 + 4x_2 = 112,\ 0 \le x_1 \le 112,\ 0 \le x_2 \le 28$ ，最优化

$$u = -\frac{1}{4}(\sqrt{x_1})^2 + 4(\sqrt{x_1}) + 28 = -\frac{1}{4}(\sqrt{x_1} - 8)^2 + 44$$

当 $x_1 = 64,\ x_2 = 12$ 时，效用最大化，中间的最优消费组合为 $(x_1, x_2) = (64, 12)$

新的约束 $2x_1 + 8x_2 = 256$ 即$x_1 + 4x_2 = 128,\ 0 \le x_1 \le 128,\ 0 \le x_2 \le 32$ ，最优化

$$u = -\frac{1}{4}(\sqrt{x_1})^2 + 4(\sqrt{x_1}) + 32 = -\frac{1}{4}(\sqrt{x_1} - 8)^2 + 48$$

当 $x_1 = 64,\ x_2 = 16$ 时，效用最大化，**新的最优消费组合为** $(x_1, x_2) = (64, 16)$

故商品 1 的替代效应 $\Delta x_1^s = 64 - 16 = 48$，收入效应 $\Delta x_1^n = 64 - 64 = 0$

题目 7.9
McCawber 一家的日子现在十分困难。他们每周花 100 美元在食品上，50 美元在其他商品上。现在有一个新的福利计划，该计划可以给他们家以下两种选择：接受每周 50 美元的补贴，他们可以随便花这 50 美元；或用 1 美元 1 张优惠券的价格购买任意数量的价值 2 美元的食品优惠券（不允许他们转卖优惠券）。食品对 McCawber 一家来说是正常商品。你是他们家的朋友，他们请你帮忙决定应该如何选择。利用你学过的经济学知识，回答下列问题。
(a) 在下图中，用红笔画出他们家旧的预算线，并用字母 C 标出他们当前的选择。现在用黑笔画出选择补贴时的预算线。如果选择优惠券方案，并且把所有的钱都用在食品优惠券上，他们能买到多少食品？如果不买食品，他们可以花多少钱在其他商品上呢？用蓝笔画出他们选择优惠券时的预算线。
(b) 你知道食品对 McCawber 一家来说是正常商品，还知道他们以前购买的消费束。据此，如果选择一次性的补贴计划，请在黑色预算线上将他们家可能选择的消费束部分加深。将线段端点用字母 A 和 B 标出。
(c) 对刚才画的图进行研究之后，你对 McCawber 一家说："我已经有足够的信息能够判断你们应该做何种选择了。你们应该选择________________，因为____。"
(d) McCawber 先生对你的帮助表示了感谢，又问道："如果你不知道食品对我们来说是否是正常商品，你能告诉我应该怎么选择吗？"在下面的坐标系中，画出上图中画过的同样的预算线，但是画出食品不是正常商品时的无差异曲线，此时 McCawber 一家不选择你推荐的计划时状况会更好。

解答

(a) **旧预算线**：总收入为 $100 + 50 = 150$，故预算约束为

$$F + O = 150$$

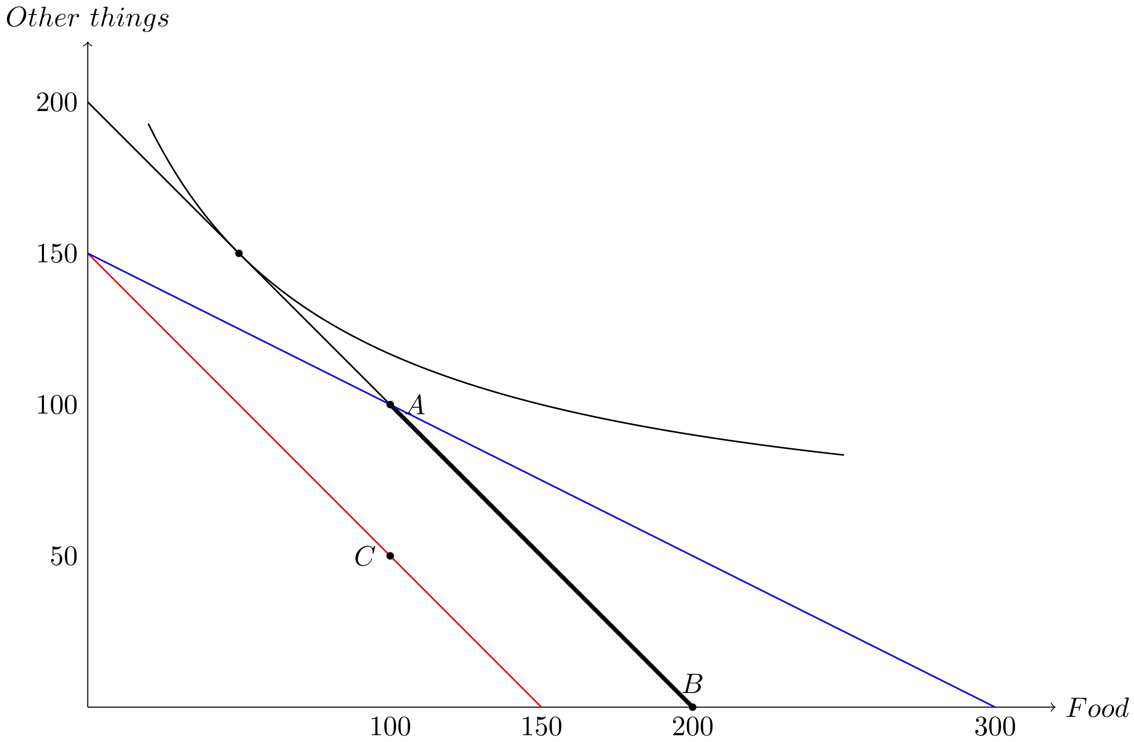
当前选择为$C(100, 50)$。**补贴预算线**：相当于总收入为 $150 + 50 = 200$，故预算约束为

$$F + O = 200$$

优惠券预算线：总收入全用于购买优惠券可得 \$300 食品，全用于购买其他商品可得 \$150 其他商品，故预算约束为

$$F + 2O = 300$$

(b) 由于食品是正常品，故选择黑色预算线上食品多于 \$100 的部分 $A(100, 100) - -B(200, 0)$，方可提高效用
(c) 应选**食品优惠券方案**，因为**在同样的总收入下，相较于初始消费束，该方案使获得的食品更多**
(d) 假设商品非正常品，又要求本次选择**补贴方案**，只需找到一条**凸**无差异曲线使补贴方案效用更高，如下图示例



题目 8.5

假设两种商品是完全互补品。若一种商品价格变化，则替代效应和收入效应导致的需求变化分别占多大比例？

解答

记两种商品数量分别为 x_1，x_2，价格分别为 p_1，p_2，总收入为 m

完全互补品的无差异曲线为

$$u = \min\{x_1, x_2\}$$

预算线为

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

此时最优消费束中的商品 1 数量为 x_1

当商品 1 的价格减小至 p_1' 时，旧预算线绕最优点**逆时针**旋转得中间预算线

$$p_1'x_1 + p_2x_2 = m'$$

最优消费束中的商品 1 数量为 $x_1' = x_1$

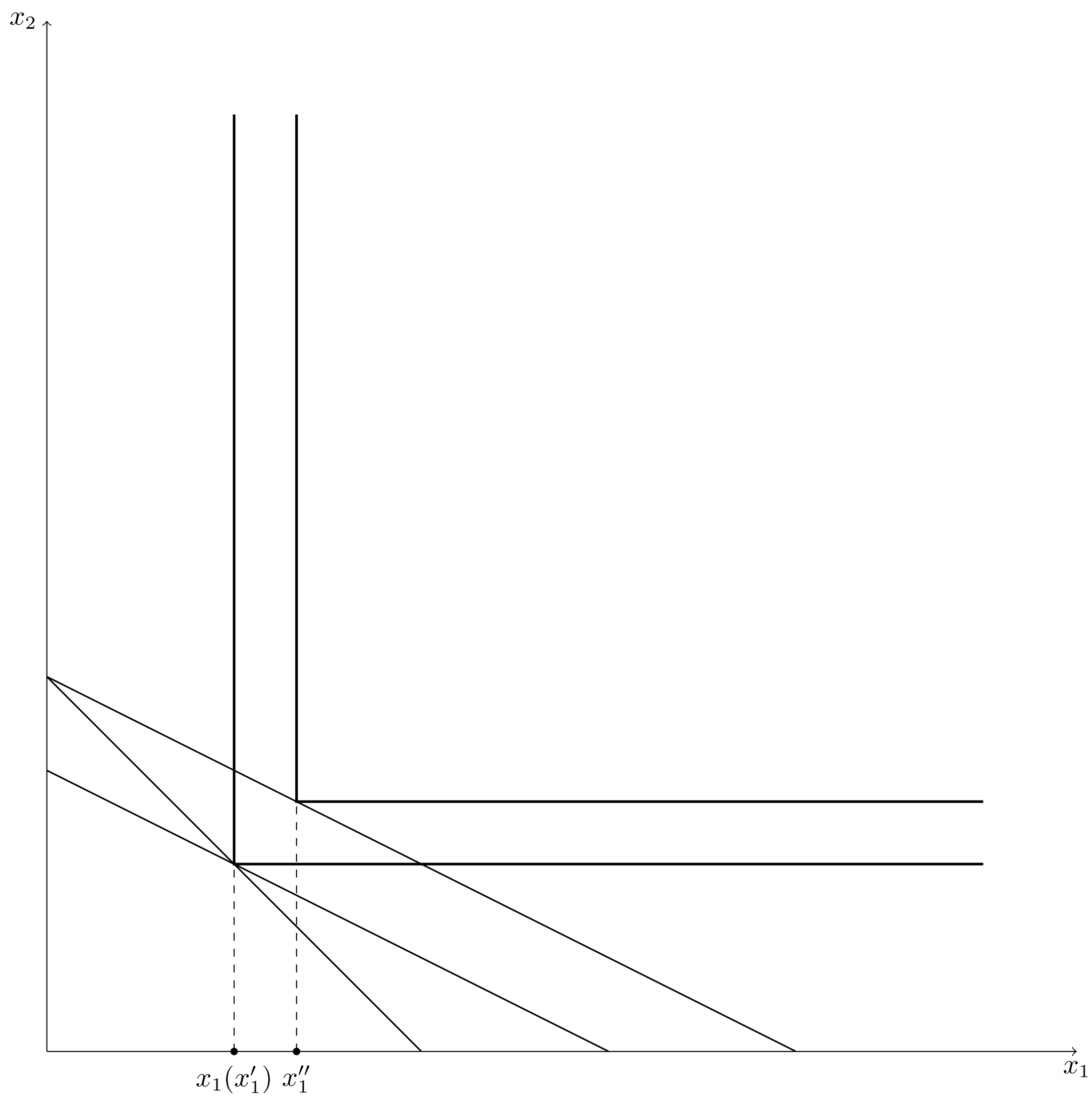
中间预算平移至过 $(0, x_2)$ 得新预算线

$$p_1'x_1 + p_2x_2 = m$$

最优消费束中的商品 1 数量为 $x_1'' > x_1'$ 故

$$\Delta x_1^s = x_1' - x_1 = 0,\ \Delta x_1^n = x_1'' - x_1'$$

即商品 1 的收入效应对需求变化的影响占 100%，替代效应的影响为 0



题目 9.12

Wendy 和 Mac 在一家快餐店工作。Wendy 每周的工作时间达到 40 个小时前的工资是每小时 4 美元，超过 40 小时后的工资是每小时 6 美元。Mac 无论工作多少小时，他的工资都是每小时 5 美元。他们每个人每周有 80 个小时可用在工作和闲暇上，并且都没有除劳动以外的其他收入来源。两个人的效用函数都是 $U = cr$，其中 c 是消费，r 是闲暇。每个人都可以选择工作的小时数。

(a) Mac 将会选择工作多少小时？

(b) Wendy 的预算“线”有一个折点，在该点处 $r =$ ________，$c =$ ________。如果她选择不超时工作，用蓝笔标出她所处的预算线的部分。如果她选择超时工作，用红笔标出她所处的预算线的部分。

(c) 你所画的蓝色线段位于一条方程为 ________ 的直线上。你所画的红色线段位于一条方程为 ________ 的直线上。（提示：对于红线，你知道该线上的一点和它的斜率。）

(d) 如果无论工作多少小时，Wendy 的工资都是每小时 4 美元，那么她将会选择工作几小时？每周总共挣多少钱？在图中，用黑笔画出她通过该点的无差异曲线。

(e) Wendy 会选择超时工作吗？Wendy 在红色预算线上的最优选择 (c, r) 是什么？她每周会工作几小时？

(f) 假设这一工作在所有其他方面都同样完成得好。由于 Wendy 和 Mac 的偏好相同，他们将能够对谁的工作更好而达成一致意见。谁的工作更好？（提示：计算 Wendy 在自己的最优选择上的效用。如果她做 Mac 的工作，并且选择最优的工作小时数，计算她此时的效用）

解答

(a) 设 Mac 工作 h 小时，则闲暇时间为 $r = 80 - h$，他的收入为 $c = 5h$

效用函数为 $U = cr = 5h(80 - h)$。为最大化效用，运用基本不等式

$$U \le 5(\frac{h + 80 - h}{2})^2 \implies h = 40\text{时取等}$$

因此，**Mac 将会选择工作 40 小时**

(b) 设 Wendy 工作 h 小时，其中 $h \le 40$ 时工资为 4 美元，$h > 40$ 时工资为 6 美元，闲暇时间为 $r = 80 - h$

收入分为两部分：当 $h \le 40$ 时，收入 $c = 4h$；当 $h > 40$ 时，收入 $c = 4 \times 40 + 6(h - 40) = 160 + 6(h - 40)$

折点出现在 $h = 40$ 时，$r = 80 - 40 = 40$，$c = 4 \times 40 = 160$，**预算线如下图**

(c) 不超时工作，$c = 4(80 - r)$ 即 $c + 4r = 320$；超时工作，$c = 160 + 6[(80 - r) - 40)]$ 即 $c + 6r = 400$

(d) 计算过程同 (a)，Wendy 将会选择工作 40 小时，每周共挣 $\$4 \times 40 = \$160$，通过 $(40, 160)$ 的**无差异曲线如下图**

(e) 超时工作，$U = (400 - 6r)r \le \frac{2}{3}(\frac{200-3r+3r}{2})^2 = \frac{20000}{3}$；

不超时工作，$U \le 4(\frac{80-r+r}{2})^2 = 6400 < \frac{20000}{3}$

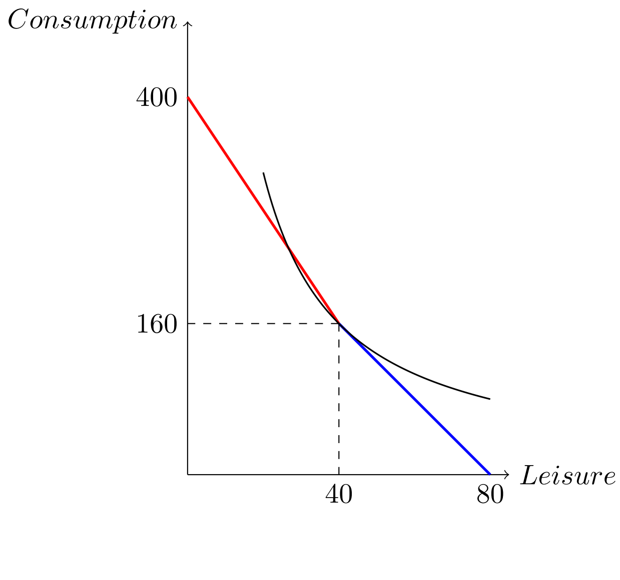
故 **Wendy 会选择超时工作**，在红线上的最优选择 $(c, r) = (200, \frac{100}{3})$，每周工作 $h = 80 - r = \frac{200}{3}$ 小时

(f) “工作好” $\implies$ 获得的效用高

$$U_{M\_max} = 8000(\text{由 (a) 知})$$

$$U_{W\_max} = \frac{20000}{3}(\text{由 (e) 知})$$

比较知，$U_{M\_max} > U_{W\_max}$，从而 **Mac 的工作更好**



题目 10.8

O.B.Kandle 先生将只生存两期：第一期，他将挣到 50000 美元；第二期，他将会退休并依靠储蓄生活。

其效用函数为 $U(c_1, c_2) = c_1 c_2$，其中 c_1 是第一期消费，c_2 是第二期消费。他能以 $r = 0.10$ 的利率进行借贷。

(a) 如果利率上升，他第一期的消费将会增加，减少还是保持不变?

(b) 利率上升将使他在第二期消费得更多还是更少?

(c) 如果 Kandle 先生第一期的收入是零，第二期的收入是 55000 美元，那么利率上升会使他在第一期消费得更多、更少还是不变?

解答

记第一期收入 m_1，第二期收入 m_2

(a)(b) 第一期收入 $m_1 = 50000$，第二期收入 $m_2 = 0$，则

$$c_2 = (1+r)(m_1 - c_1)$$

代入效用函数中，有

$$U = (1+r)c_1(m_1 - c_1) \leq (1+r)(\frac{c_1 + m_1 - c_1}{2})^2$$

当且仅当 $c_1 = \frac{m_1}{2}, c_2 = \frac{(1+r)m_1}{2}$ 时，效用最大化

故利率 r 的上升使**第一期消费不变，第二期消费增加**

(c) 第一期收入 $m_1 = 0$，第二期收入 $m_2 = 55000$，则他需要再第一期借贷 c_1，第二期用收入 m_2 还款 $(1+r)c_1$

从而第二期消费

$$c_2 = m_2 - (1+r)c_1$$

代入效用函数中，有

$$U = (1+r)c_1(\frac{m_2}{1+r} - c_1) \leq (1+r)(\frac{c_1 + \frac{m_2}{1+r} - c_1}{2})^2$$

当且仅当 $c_1 = \frac{m_2}{2(1+r)}, c_2 = \frac{m_2}{2}$ 时，效用最大化

故利率 r 的上升使**第一期消费减少**