《中级微观经济学》PS1

授课教师： 徐化愚　　学生姓名： 岳羽辰　　学号： 2310120106

Due：2025.3.12

题目：Homework 1

Bridgette likes scones and tea. She has £10 to spend on scones and tea; scones cost £2 each, and cups of tea cost £1 each. Sketch her budget constraint on a graph with scones on the horizontal axis and cups of tea on the vertical axis. Bridgette also has a calorie constraint: she can only consume 800 calories, and each scone has 200 calories, while tea has no calories. On your graph, sketch in Bridgette's calorie constraint and indicate her budget set - the set of feasible combinations of scones and tea given her two constraints. Label all the kinks of Bridgette's budget set with their coordinates. The tea shop where Bridgette buys scones and tea started putting sugar in the tea, so that each cup of tea now has 50 calories. In a new graph with scones on the horizontal axis and cups of tea on the vertical axis, sketch in Bridgette's money constraint (she still has just £10 and prices did not change), her calorie constraint (she still only consumes 800 calories), and indicate her budget set. Label all the kinks of her budget set with their coordinates. Show your work.

Bridgette 喜欢司康饼和茶。她有 £10 可以用来购买这两种商品。司康饼的单价是 £2，茶的单价是 £1。

(1) 请在坐标系中，以司康饼的数量为横轴，茶的数量为纵轴，画出她的预算约束线。

(2) Briget 还受能量摄入的约束：她的能量摄入上限是 800 卡路里，而每个司康饼含 200 卡路里，茶不含卡路里。在图中绘制出 Bridgette 的卡路里约束，并标记出预算集（同时满足预算和卡路里约束的可行组合）请标注预算集所有拐点的坐标。

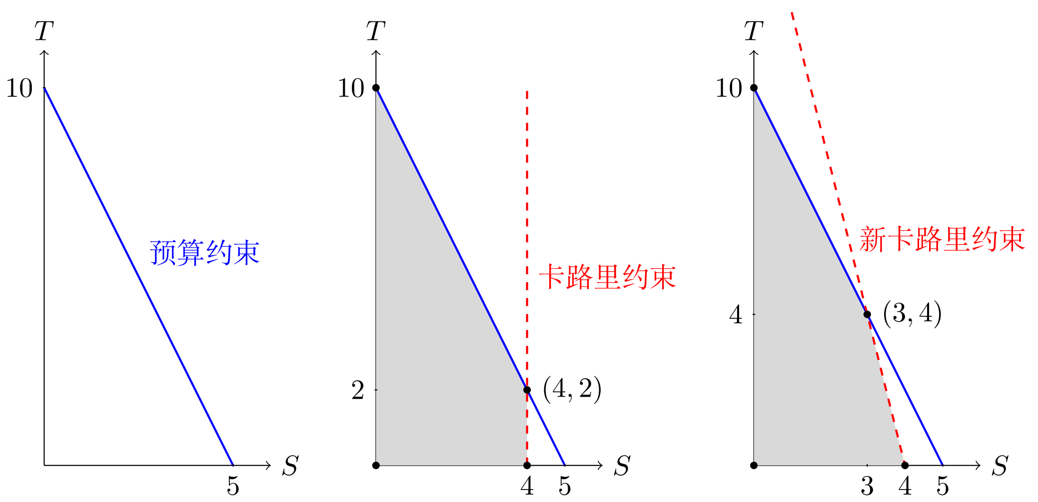
(3) 茶店开始在茶中加糖，这使得每杯茶的卡路里变为 50 卡路里。在新坐标系中，仍以司康饼的数量为横轴，茶的数量为纵轴，绘制 Bridgette 的预算约束线（她依然拥有 £10，且价格不变）、卡路里约束线（仍受 800 卡路里限制），并标记新的预算集，同样标注所有拐点的坐标。

解答

(1) 预算约束为 $2S + T = 10$

(2) 卡路里约束 $200 \cdot S + 0 \cdot T = 800$ 即 $S = 4$，预算集便是预算约束左侧与卡路里约束左侧的交集，联立得拐点 $(4, 2)$

(3) 新卡路里约束 $200S + 50T = 800$ 即 $4S + T = 16$，新预算集便是预算约束左侧与新卡路里约束左侧的交集，联立得拐点 $(3, 4)$



题目：Homework 2

Ethel has preferences over amounts of goods 1 and 2 represented by the utility function $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$, where x_1 denotes how much of good 1 she has and x_2 denotes how much of good 2 she has. Write an expression for Ethel’ s marginal utility for good 1. Does she like good 1? Explain your answer. Write an expression for Ethel’s marginal rate of substitution at any point. Do Ethel’s preferences exhibit a diminishing marginal rate of substitution? Suppose Ethel was at the point $(x_1, x_2) = (10, 10)$, and Pete offered to give her 2 units of good 2 in exchange for 2 units of good 1. Would Ethel be willing to accept this trade? Explain your answer. On a graph with good 1 on the horizontal axis, sketch Ethel’s indifference curves through the points (1, 0), (2, 0), (3, 0) and (4, 0). Does Ethel have convex preferences?

Ethel 对商品 1 和商品 2 的偏好的效用函数表示为 $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$，其中 x_1 是她拥有的商品 1 的数量，x_2 是她拥有的商品 2 的数量。

(1) 写出 Ethel 对商品 1 的边际效用（Marginal Utility）表达式。她是否喜欢商品 1？请说明理由。

(2) 写出 Ethel 的边际替代率（MRS）的表达式。Ethel 的偏好是否呈现出 MRS 是递减的？请说明理由。

(3) 假设 Ethel 当下物品束为 $(x_1, x_2) = (10, 10)$，Pete 想用自己 2 单位商品 2 交换以得到 2 单位商品 1，Ethel 愿意交易吗？

(4) 在以商品 1 为横轴的坐标系中，画出 Ethel 过点 $(1, 0)$，$(2, 0)$，$(3, 0)$ 和 $(4, 0)$ 的无差异曲线。Ethel 是否具有凸偏好？

解答

(1) 边际效用（MU）是效用函数关于商品数量的导数。对于商品 1，边际效用 MU_1 为

$$MU_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2 + x_2) = 2x_1$$

她喜欢商品 1，因为 $MU_1 = 2x_1$ 总是正的（$x_1 > 0$），说明随着商品 1 数量的增加，Ethel 的效用增加

(2) 边际替代率（MRS）是效用函数关于商品 1 的偏导数与关于商品 2 的偏导数的比值的负数，即

$$MRS = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -2x_1$$

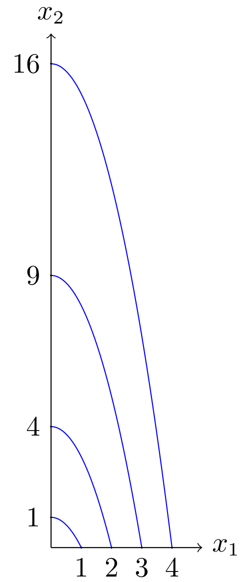
|MRS| 递增，因为随 x_1 的增加，$MRS = -2x_1$ 的绝对值增大，说明 Ethel 为额外的商品 1 愿意放弃的商品 2 的数量递增

(3) 不愿交易。因为交易前 Ethel 的效用 $u(10, 10) = 110$，交易后效用却降为 $u(8, 12) = 76$

(4) 无差异曲线是效用函数等于常数的点的集合。对于给定的效用水平 u，无差异曲线的方程为 $x_1^2 + x_2 = u$ 即

$$x_2 = u - x_1^2$$

四条无差异曲线如下，可见 Ethel 的偏好不是凸的，因为同一 IC 上 |MRS| 随 x_1 增大而增大，在 IC 上任取两点所连线段都在曲线之下，不满足凸偏好性定义



题目：Homework 3

Consider Logan, a consumer who has preferences represented by the utility function $U(H,J) = H^{\frac{2}{3}} + J^{\frac{2}{3}}$, where H represents the number of healthy meals Logan consumes per week and J represents the number of unhealthy (junk) meals that Logan consumes per week. Logan has an income of $42 per week. The price of healthy meals and the price of unhealthy meals are each $2 per meal. Find Logan's utility-maximizing consumption bundle. What proportion of the meals that Logan consumes are healthy? Now suppose that Logan's parents offer to pay for 50% of Logan's healthy meals, thus lowering the price of a healthy meal to $1. Find Logan's new utility-maximizing consumption bundle. Now, what proportion of the meals that Logan consumes are healthy?

假设 Logan 的偏好由效用函数 $U(H,J) = H^{2/3} + J^{2/3}$ 表示，其中 H 为每周食用的健康餐数量，J 为每周食用的垃圾餐数量。Logan 每周的收入为 \$42，每种餐的单价均为 \$2。

(1) 求 Logan 的效用最大化消费束。他所消费的餐中有多少比例是健康餐？

(2) Logan 的父母为其支付 50% 的健康餐费用，从而使健康餐的价格降为 \$1。求 Logan 新的效用最大化消费束。现在他所消费的餐中有多少比例是健康餐？

解答

(1)Logan 的效用函数为

$$U(H,J) = H^{2/3} + J^{2/3}$$

预算约束为

$$2H + 2J = 42 \quad \Rightarrow \quad H + J = 21$$

为求解效用最大化消费束，用 Lagrange 方法，构造 Lagrange 函数

$$\mathcal{L}(H,J,\lambda) = H^{2/3} + J^{2/3} + \lambda(21 - H - J)$$

对 H、J 和 λ 求偏导并令其等于零

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H} = \frac{2}{3}H^{-1/3} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J} = \frac{2}{3}J^{-1/3} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 21 - H - J = 0$$

解得 Logan 的效用最大化消费束为 $(H,J) = (10.5, 10.5)$，从而健康餐比例

$$\frac{H}{H+J} = \frac{1}{2}$$

(2) 健康餐的价格降为 \$1，预算约束变为

$$H + 2J = 42$$

构造新的 Lagrange 函数

$$\mathcal{L}(H,J,\lambda) = H^{2/3} + J^{2/3} + \lambda(42 - H - 2J)$$

对 H、J 和 λ 求偏导并令其等于零：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H} = \frac{2}{3}H^{-1/3} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J} = \frac{2}{3}J^{-1/3} - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 42 - H - 2J = 0$$

解得 Logan 的新的效用最大化消费束为 $(H,J) = (33.6, 4.2)$，从而健康餐比例

$$\frac{H}{H+J} = \frac{8}{9}$$

题目 2.3

你的预算约束是这样的：如果你花掉所有的收入，你可以买到 4 单位的商品 x 和 6 单位的商品 y，或者 12 单位的商品 x 和 2 单位的商品 y。

(a) 在下图中标出这两个消费束并画出预算线。

(b) 商品 x 和 y 的价格比是多少?

(c) 如果你将所有的收入用于购买 x，可以买到多少 x?

(d) 如果你将所有的收入用于购买 y, 可以买到多少 y?

(e) 当 x 的价格是 1 时，写出能给出这一预算线的预算方程。

(f) 当 x 的价格是 3 时，写出能给出相同的预算线的预算方程。

解答

(a) 如下图所示，两组消费束分别为 $(4,6),(12,2)$

(b) 设商品 x 的价格为 p_x，商品 y 的价格为 p_y，收入为 I

根据预算线上的两个点 $(4,6)$ 和 $(12,2)$，有

$$4p_x + 6p_y = I \quad \& \quad 12p_x + 2p_y = I$$

联立解得商品 x 和 y 的价格比为

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2}$$

(c)(d) 根据预算方程

$$p_x x + p_y y = I$$

当 $y = 0$ 时

$$x = \frac{I}{p_x}$$

根据之前的计算，有 $p_y = 2p_x$，因此

$$4p_x + 6(2p_x) = I \quad \rightarrow \quad I = 16p_x$$

因此，当 $y = 0$ 时

$$x = \frac{16p_x}{p_x} = 16$$

同理可得，当 $x = 0$ 时

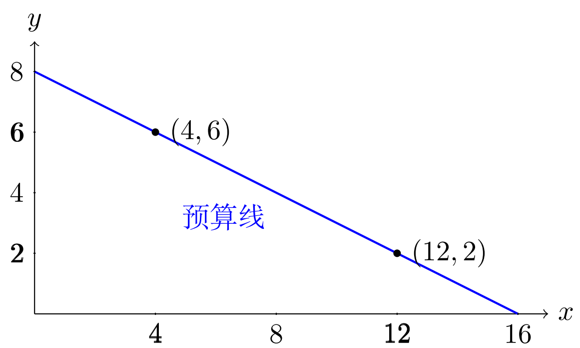
$$y = \frac{8p_y}{p_y} = 8$$

(e) 依题意 $p_x = 1$，则 $p_y = 2$，从而预算方程为

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = I \quad \rightarrow \quad x + 2y = 16$$

(e) 依题意 $p_x = 3$，则 $p_y = 6$，从而预算方程为

$$3 \cdot x + 6 \cdot y = I \quad \rightarrow \quad 3x + 6y = 48$$



题目 3.9

Mary Granola 喜欢吃两种东西，柚子和鳄梨。

(a) 在下图中，当她吃的柚子比鳄梨多时，通过这些点的无差异曲线的斜率是 -2。这表明当她吃的柚子比鳄梨多时，她愿意放弃多少个柚子以换取额外一个鳄梨?

(b) 在同一个图中，当她吃的柚子比鳄梨少时，通过这些点的无差异曲线的斜率是 $-1/2$。这表明当她吃的柚子比鳄梨少时，她愿意放弃多少个柚子以换取额外一个鳄梨?

(c) 在该图中，画一条通过消费束 (10 个鳄梨，10 个柚子) 的无差异曲线。再画一条通过消费束 (20 个鳄梨，20 个柚子) 的无差异曲线。

(d) Mary 的偏好是凸的吗?

解答

记鳄梨数量为 x_1，柚子数量为 x_2，它们在 Mary 心目中的单价分别为 p_1, p_2(随 x_1, x_2 变化而变化)

根据前两问的描述，得效用函数

$$U(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

则无差异曲线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{p_1}{p_2}$$

故该斜率绝对值的一个经济学意义：鳄梨与柚子在 Mary 心目中的价格比，即每获得额外一个鳄梨，所愿放弃的柚子数量

(a) 因此，当她吃的柚子比鳄梨多时，她愿意放弃 2 个柚子以换取额外一个鳄梨

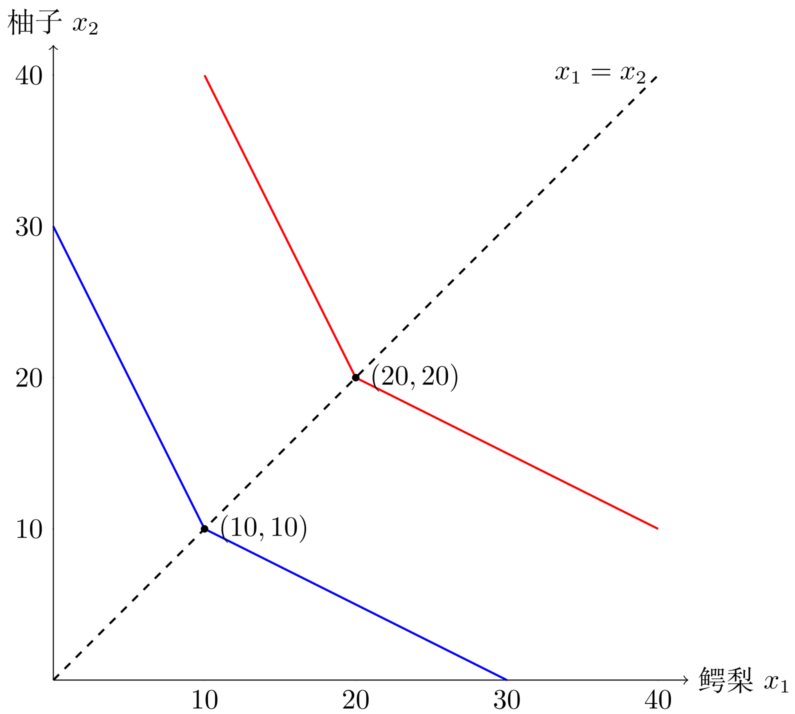
(b) 同理可得，当她吃的柚子比鳄梨少时，她愿意放弃 1/2 个柚子以换取额外一个鳄梨

(c) 如下图，每一条无差异曲线都是折线，折线关于直线 $x_1 = x_2$ 是轴对称的，分别为

$$\text{蓝线：} 2x_1 + x_2 = 30 (x_1 \leq 10 \leq x_2), \quad x_1 + 2x_2 = 30 (x_1 \geq 10 \geq x_2)$$

$$\text{红线：} 2x_1 + x_2 = 60 (x_1 \leq 20 \leq x_2), \quad x_1 + 2x_2 = 60 (x_1 \geq 20 \geq x_2)$$

(d) Mary 的偏好是凸的，因为同一无差异曲线上任意两点所连线段均在 IC 之上，满足偏好凸性定义



题目 4.8

Vanna Boogie 喜欢举办大型派对。她还特别喜欢让派对的男性人数与女性人数恰好一样多。事实上，Vanna 在派对之间的偏好可以用效用函数 $U(x,y)=\min\{2x-y,2y-x\}$ 来代表，其中 x 是女性的人数，y 是男性的人数。在下图中，我们试着画一下 Vanna 的效用水平为 10 时的无差异曲线。

(a) 用铅笔画出满足 $x=y$ 的点的轨迹。

(1) 哪一点带给 Vanna 的效用为 10?

(2) 用蓝笔画满足 $2y-x=10$ 的轨迹。当 $\min\{2x-y,2y-x\}=2y-x$ 时，男女人数谁更多? 用红笔在满足 $U(x,y)=\min\{2x-y,2y-x\}=2y-x$ 的蓝线部分画一条波浪线。这说明该线上所有点的效用等同于 (10,10)，请问男女人数谁更多?

(3) 用蓝笔画满足 $2x-y=10$ 的轨迹。用红笔在满足 $U(x,y)=\min\{2x-y,2y-x\}=2x-y$ 的蓝线部分画一条波浪线。

(4) 用铅笔将图中 Vanna 认为至少与 (10, 10) 一样好的区域涂成阴影。

(b) 假设 Vanna 的派对上有 9 位男性，10 位女性。如果又有 5 位男性来参加 Vanna 的派对，Vanna 认为派对是变得更好了还是更坏了?

(c)(1) 如果 Vanna 的派对上有 16 位女性和更多的男性，Vanna 认为这个派对与 10 位女性和 10 位男性的派对一样好，那么这个派对上的男性人数是多少?

(2) 如果 Vanna 的派对上有 16 位女性和更少的男性，Vanna 认为这个派对与 10 位女性和 10 位男性的派对一样好，那么这个派对上的男性人数多少?

(d) Vanna 无差异曲线的形状像字母表中的哪个字母?

解答

(a)(1) 满足 $x=y$ 的点的轨迹是一条直线

当 $x=y$ 时，效用函数 $U(x,y)=\min\{2x-y,2y-x\}=\min\{x,x\}=x$。因此，当 $x=y=10$ 时，效用为 10，这一点是 $(10,10)$

(2) 当 $\min\{2x-y,2y-x\}=2y-x$ 时，说明 $2y-x\leq 2x-y$，即 $y\leq x$，从而**女性人数更多** (两小问答案均为女人多)

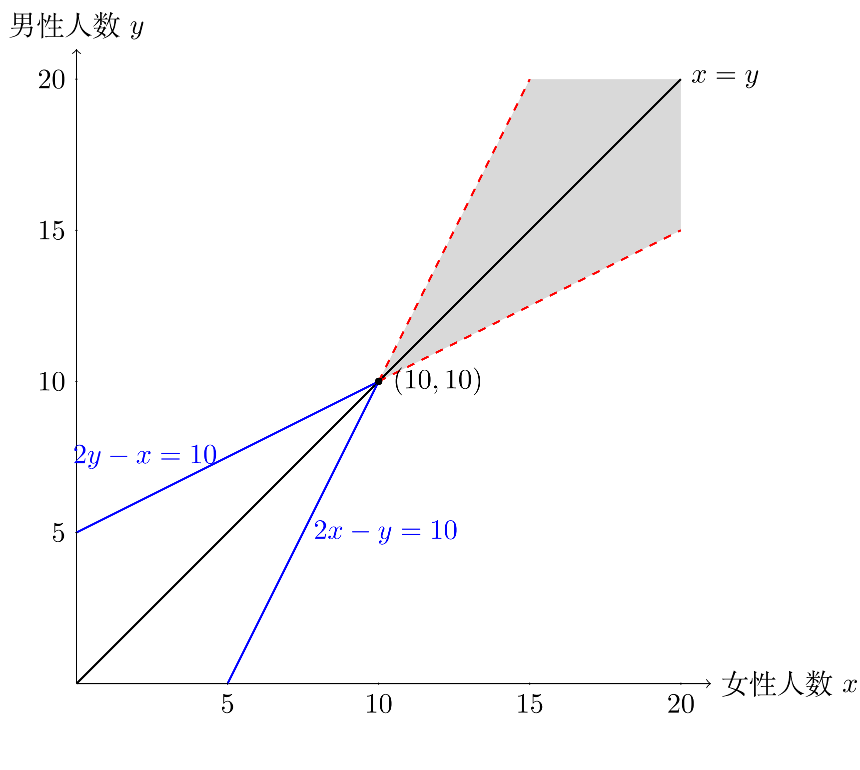
(3)(4) 如下图所示

(b) 原效用 $U(10,9)=\min\{2\times10-9,2\times9-10\}=8$；新效用 $U(10,14)=\min\{2\times10-14,2\times14-10\}=6$。因此，**派对更差**

(c)(1) 当派对上有 16 位女性和更多的男性时，效用由 $2x-y$ 决定，故 $2\times16-y=10$，解得 $y=22$ 即男性人数是 22

(2) 当派对上有 16 位女性和更少的男性时，效用由 $2y-x$ 决定，故 $2y-16=10$，解得 $y=13$ 即男性人数是 13

(d) 无差异曲线像 **V** 字母



题目 5.7

Linus 的效用函数是 $U(x,y)=x+3y$。

(a) 在右图中，用蓝笔画出通过点 $(x,y)=(3,3)$ 的无差异曲线。用黑笔将给 Linus 带来的效用为 6 的消费束联成一条无差异曲线。

(b) 在同一个图中，如果 x 的价格是 1，y 的价格是 2，Linus 的收入是 8，用红笔画出 Linus 的预算线。此时 Linus 选择的消费束是什么?

(c) 如果 x 的价格是 1，y 的价格是 4，Linus 的收入是 8，他将选择何种消费束?

解答

(a) 当消费束为

$$(x,y)=(3,3)$$

时，效用为

$$U(x,y)=12$$

故过 $(3,3)$ 的无差异曲线方程为

$$x+3y=12$$

该曲线是一条过 $(12,0),(0,4)$ 的直线 (蓝线)，若效用为 6，则曲线为一条过 $(6,0),(0,2)$ 的直线 (黑线)

(b) 设 p_x,p_y 分别为 x,y 的单价，I 为 Linus 的收入，则预算约束公式为

$$p_x x+p_y y=I$$

代入 $p_x=1,p_y=2,I=8$，得预算约束方程 (外侧红线) 为

$$x+2y=8$$

为使 Linus 效用最大化，在众多相互平行的无差异曲线束 $x+3y=u$ 中，选择预算约束下最靠外的 IC

$$x+3y=12$$

可得最优消费束为

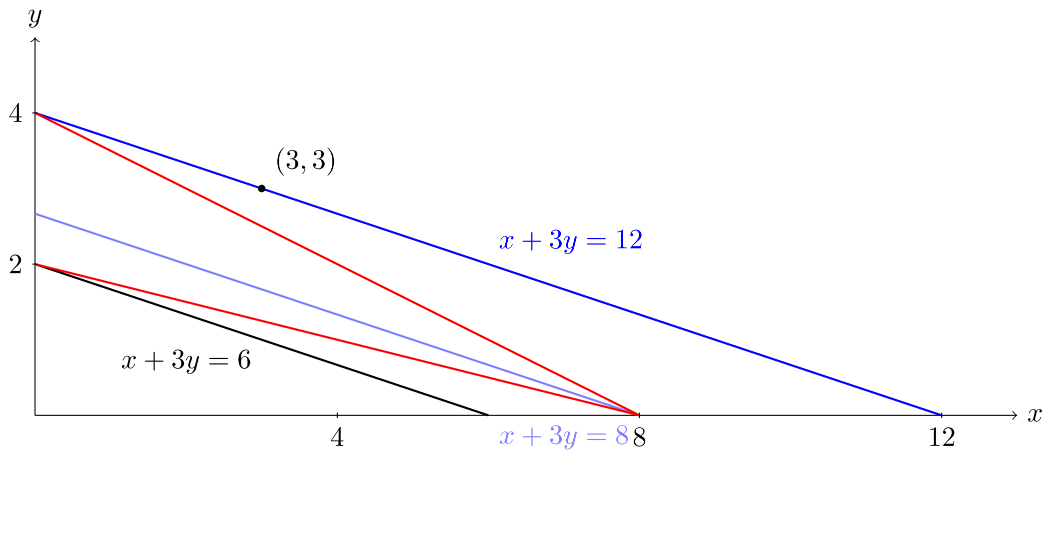
$$(x,y)=(0,4)$$

(c) 同理，在众多平行无差异曲线束 $x+3y=u$ 中，选择预算约束 $x+4y=8$(内侧红线) 下，最靠外的 IC(浅蓝色线)

$$x+3y=8$$

可得最优消费束为

$$(x,y)=(8,0)$$



题目 5.11

中心中学有 60000 美元可用于购买计算机和其他商品，故预算约束是 $C+X=60000$。其中 C 是在计算机上的支出额，X 是在其他商品上的支出额。中心中学现在决定花 20000 美元购买计算机。

州教育委员会希望在自己管辖的中学里倡导“计算机教育”项目，有如下几个计划：

计划 A: 给予该州的每个中学 10000 美元，并且它们可以按照自己的意图花这笔钱。

计划 B: 与每个中学当前在计算机上的支出额相比，只要它们至少再多支出 10000 美元在计算机上，就给予该中学 10000 美元。任何学校都可以选择不参加这一项目，此时它得不到这一款项，但也不用增加其计算机的支出额。

计划 C: 计划 C 是“配套给予”。某个中学每多订购 1 美元价值的计算机，州委员会就会给予该学校 50 美分。

计划 D: 这一计划与计划 C 类似。不同的是，计划 D 中，任何中学能够获得的最高的配套金额是 10000 美元。

假设中心中学的偏好用效用函数 $U(C,X)=CX^2$ 表示。探究以上不同计划将如何影响中心中学花在计算机上的钱。

(a) 如果该州没有采取以上任何一个新计划，在该区的预算约束条件下，找出能最大化其效用的计算机上的开支额。

(b) 如果采用计划 A，在该区的预算约束条件下，找出能最大化其效用的计算机上的开支额。

(c) 如果采用计划 B，在图中画出通过点 (30000, 40000) 的无差异曲线。在这点处，无差异曲线和预算线谁更陡?

(d) 如果采用计划 B，在该区的预算约束条件下，找出能最大化其效用的计算机上的开支额。(提示：看图像)

(e) 如果采用计划 C，在该区的预算约束条件下，找出能最大化其效用的计算机上的开支额。

(f) 如果采用计划 D，在该区的预算约束条件下，找出能最大化其效用的计算机上的开支额。

解答

(a) 中心中学的预算约束为 $C+X=60000$，效用函数为 $U(C,X)=CX^2$，最大化效用

$$\max_{C,X} CX^2 \quad (\text{在}C+X=60000\text{条件约束下})$$

使用 Lagrange 乘数法，建立 Lagrange 方程

$$\mathcal{L}=CX^2+\lambda(60000-C-X)$$

求导并令其为零

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C}=X^2-\lambda=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=X^2$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X}=2CX-\lambda=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=2CX$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=60000-C-X=0$$

联立以上方程

$$X^2=2CX \quad\Rightarrow\quad X=2C$$

代入预算约束

$$C+2C=60000 \quad\Rightarrow\quad C=20000,\quad X=40000$$

因此，最优的计算机支出额为 $C=20000$

(b) 计划 A 提供额外的 10000 美元，总预算为 70000 美元, 预算约束变为 $C+X=70000$，最大化效用

$$\max_{C,X} CX^2 \quad (\text{在}C+X=70000\text{条件约束下})$$

使用拉格朗日乘数法，计算过程同 (a)

$$C=23333,\quad X=46667$$

因此，最优的计算机支出额为 $C=23333$

(c) 计划 B 要求学校在计算机上至少多支出 10000 美元，即 $C \geq 30000$ 时方可补助，预算约束为 $C + X = 70000$
在点 $(30000, 40000)$ 处，无差异曲线为 $CX^2 = 30000 \times 40000^2$
无差异曲线的斜率为

$$\frac{dX}{dC} = -\frac{X^2}{2CX} = -\frac{X}{2C}$$

在点 $(30000, 30000)$ 处，无差异曲线的斜率为

$$\frac{dX}{dC} = -\frac{30000}{2 \times 40000} = -\frac{3}{8}$$

预算线的斜率恒为

$$\frac{dX}{dC} = -1$$

因此，**预算线更陡**
(d) 参考 (a)(b) 的解题过程，可知，当 $0 \leq C < 30000$ 时，最优的计算机支出额为 $C = 20000$，此时效用为

$$U = 20000 \times 40000^2$$

当 $30000 \leq C \leq 70000$ 时，最优的计算机支出额为 $C = 30000$(因为 $C = 23333$ 取不到)，此时效用为

$$U = 30000 \times 40000^2$$

比较知，计划 B 下最优的计算机支出额为 $C = 30000$
(e) 计划 C 下，每 1 美元对计算机的订购都会得到 50 美分补助，故预算约束变为

$$\frac{C}{2} + X = 60000$$

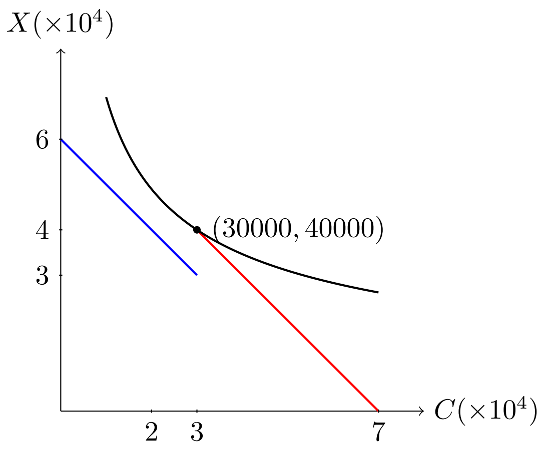
求解效用最大化下的计算机支出额，只需利用基本不等式

$$U = C \cdot X \cdot X \leq \frac{(C + X + X)^3}{3^3} = \frac{120000^3}{3^3}$$

当且仅当 $C = 40000, X = 20000$ 时，效用最大化，即计划 C 下最优的计算机支出额为 $C = 40000$
(f) 计划 D 下，预算约束为

$$\frac{C}{2} + X = 60000(0 \leq \frac{C}{2} \leq 10000) \quad 和 \quad C + X = 70000(\frac{C}{2} > 10000)$$

参考 (e) 解题过程，当 $0 \leq C \leq 20000$ 时，最优解为 $C = 20000$(因为 C=40000 取不到)，效用 $U = 20000 \times 40000^2$
参考 (b) 解题过程，当 $C > 20000$ 时，最优解为 $C = 23333$，效用 $U = \frac{70000 \times 140000^2}{3^3}$
比较知，计划 D 下最优的计算机支出额为 $C = 23333$



题目 6.7
Mary 的效用函数是 $U(b,c)=b+100c-c^2$，其中 b 是她花园里银铃的数量，c 是麦仙翁的数量。
她有 500 平方英尺的花园面积可在这两种植物之间分配。每株银铃占地 1 平方英尺，每株麦仙翁占地 4 平方英尺。她可以免费得到这两种植物的种子。
(a) 给定花园的面积，为最大化其效用，Mary 应该种多少平方英尺银铃？多少平方英尺麦仙翁？（提示：写出她关于面积的"预算约束"，把它视为一个普通的需求问题来求解。）
(b) 如果她的花园突然又多了 100 平方英尺，她应该**多**种多少面积的银铃？应该**多**种多少面积的麦仙翁？
(c) 如果 Mary 的花园只有 144 平方英尺，她将会种多少株麦仙翁？
(d) 如果 Mary 既种了银铃又种了麦仙翁，那么我们知道她花园的面积肯定大于多少平方英尺？

解答
记花园面积为 S，则有约束

$$b+4c=S$$

其中 b,c 的取值范围

$$0\le b\le S,\quad 0\le c\le\frac{S}{4}$$

因此效用函数可表达为

$$U=-c^2+96c+S=-(c-48)^2+S+2304,\quad 0\le c\le\frac{S}{4}$$

(a) 当 $S=500$ 时，有 $0\le c\le 125$，则最大化的效用水平

$$U_{\max}=U|_{c=48}$$

从而 $b=308,\quad c=48,\quad 4c=192$ 时，效用最大，应种植 308 平方英尺 (308 株) 银铃和 192 平方英尺 (48 株) 麦仙翁
(b) 由 (a) 知，仍有 $c=48$ 时效用最大化，故

$$\Delta c=0,\Delta b=\Delta S=+100$$

即应多种 100 平方英尺银铃，但不多种麦仙翁
(c) 当 $S=144$ 时，$0\le c\le 36$，则最大化效用水平

$$U_{\max}=U|_{c=36}$$

从而 $b=0,c=36,4c=144$ 时，效用取最大水平，即应种植 144 平方英尺 (36 株) 麦仙翁
(d) 由效用函数表达式

$$U=-(c-48)^2+S+2304$$

知，当且仅当 $c\ge 48$ 时，最大化效用水平才可在 $c=48\quad$ 且 $\quad b=S-4c>0$ 时取到，故花园面积

$$S>S_c=4c\ge 192$$

即花园面积必然大于 192 平方英尺

题目 6.12

Nancy Lerner 在修经济学的课，她的**总成绩是她两次考试得到的正确答案的数量中较小的那个**。第一次考试，每个正确答案要花费 Nancy 10 分钟的学习时间。第二次考试，每个正确答案要花费 Nancy 20 分钟的学习时间。已知她在两次考试上共分配 1200 分钟是最佳备考方式。Nancy 班上的一些学生比 Nancy 学得快，另一些学生比 Nancy 学得慢。一些学生会选择比 Nancy 学习更长时间，而另一些学生则会选择比 Nancy 的学习时间短一点。在这一部分，我们将求出某人选择的学习时间和考试成绩的一般的解，该人的考试成绩是她花费的学习时间的函数。

(a) 假设某个学生不为考试学习，他就得不到正确答案。对于第一次考试，这个学生每获得一个正确答案要花费 P_1 分钟的学习时间。对于第二次考试，他每获得一个正确答案要花费 P_2 分钟的学习时间。假设该学生在这两次考试上总共有 M 分钟的学习时间，他以最有效的可能的方式在这两次考试上分配时间。

(1) 该生在两次考试上将得到同样多的正确答案吗?

(2) 写出该生这门课总成绩 S 的一般表达式，这一表达式是三个变量 P_1、P_2 和 M 的函数。

(3) 如果该生想以尽可能少的学习时间得到总成绩 S，他必须在第一次考试上花几分钟的学习时间? 在第二次考试上花几分钟的学习时间?

(b) 假设某个学生的效用函数是 $U(S,M)=S-\frac{A}{2}M^2$，其中 S 是该生这门课的总成绩，M 是他花费的学习时间，A 是一个反映他有多不喜欢学习的变量。在 (a) 中，你已经求得，一个学习 M 分钟，在两次考试之间明智地分配学习时间的学生将得到 $S=\frac{M}{P_1+P_2}$ 的总成绩。用 $\frac{M}{P_1+P_2}$ 替换效用函数中的 S，再关于 M 求导以求出最大化该生效用的学习时间 M。你得到的答案是变量 P_1、P_2 和 A 的函数。该生选择效用最大化的学习时间，并在两次考试之间明智地分配学习时间，他这门课得到的总成绩 S 将是多少?

(c) Nancy Lerner 与上面说的那个学生的效用函数一样。她自己选择效用最大化的学习时间。对 Nancy 来说，$P_1=10$，$P_2=20$，她在两次考试上总共花 1200 分钟学习。解出 Nancy 的效用函数中的变量 A。

(d) Ed Fungus 是 Nancy 班上的一个学生。Ed 的效用函数正好和 Nancy 的一样，他们的 A 也一样。但是 Ed 比 Nancy 学得慢。事实上，Ed 学什么东西都要比 Nancy 多花一倍的时间，所以对他来说，$P_1=20$，$P_2=40$。Ed 也选择能最大化他的效用的学习时间。

(1) 求出 Ed 花费的学习时间与 Nancy 花费的学习时间的比率。

(2) 他这门课的成绩是高于、等于还是低于 Nancy 成绩的一半?

解答

(a) 记两次考试的成绩 (即答对的题目个数) 分别为 S_1,S_2，分配的时间分别为 M_1,M_2，则 $S=\min\{S_1,S_2\},M=M_1+M_2$

(1) 是的。理由如下:

依题意，两次考试答对个数

$$S_1=\frac{M_1}{P_1},S_2=\frac{M_2}{P_2}$$

考生目标是最大化总成绩 $S=\min\{S_1,S_2\}$

若 $S_1<S_2$，则 $S=\frac{M_1}{P_1}<\frac{M_2}{P_2}=\frac{M-M_1}{P_2}$，推知 $M_1<\frac{P_1}{P_1+P_2}M$，从而

$$S<\frac{M}{P_1+P_2}$$

若 $S_1>S_2$，同理可得

$$S<\frac{M}{P_1+P_2}$$

但当 $S_1=S_2$ 时，可解得

$$S=\frac{M}{P_1+P_2}$$

较前两种情况下的总成绩更高，故该生在两次考试上将得到同样多的正确答案

(2) 由 (1) 知

$$S=\frac{M}{P_1+P_2}$$

(3) 由 (2) 知，$S=S_1=S_2$，则 $\frac{M_1}{P_1}=\frac{M_2}{P_2}$， 其中总时间$M=M_1+M_2$但在这一小问中是未知量，解得

$$M_1=P_1S,\quad M_2=P_2S$$

因此考生将在第一次考试上花 P_1S 分钟，第二次考试上花 P_2S 分钟

(b)(1) 将 $S=\frac{M}{P_1+P_2}$ 代入效用函数得

$$U(M)=\frac{M}{P_1+P_2}-\frac{A}{2}M^2$$

求导，令其为 0，有

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}M}=\frac{1}{P_1+P_2}-AM=0$$

解得

$$M=\frac{1}{A(P_1+P_2)}$$

(2) 当 $M=\frac{1}{A(P_1+P_2)}$ 时，总成绩

$$S=\frac{M}{P_1+P_2}=\frac{1}{A(P_1+P_2)^2}$$

(c) 由 (b)(1) 知

$$A=\frac{1}{M(P_1+P_2)}$$

代入数据

$$P_1=10,P_2=20,M=1200$$

解得

$$A=\frac{1}{36000}$$

(d) 记 Ed 在第一次考试做对一道题所花时间为 P_1' 分钟，第二次考试为 P_2' 分钟，总时间为 M' 分钟，总成绩为 S'

(1) 依题意，$P_1'=2P_1,P_2'=2P_2$，从而 Ed 学习时间与 Nancy 学习时间的比率为

$$\frac{M'}{M}=\frac{\frac{1}{A(P_1'+P_2')}}{\frac{1}{A(P_1+P_2)}}=\frac{1}{2}$$

(2) Ed 总成绩与 Nancy 总成绩比值为

$$\frac{S'}{S}=\frac{\frac{1}{A(P_1'+P_2')^2}}{\frac{1}{A(P_1+P_2)^2}}=\frac{1}{4}$$

故 Ed 的成绩**低于** Nancy 成绩的一半